

SUGRA en $D > 4$

Elena Cáceres

Universidad de Colima
&
University of Texas at Austin.

Guanajuato, Junio, 2013

Outline

- ▶ Preliminares: Introduccion, Motivacion
- ▶ Primera parte: Espinores y SUGRA en $D \geq 4$
- ▶ Segunda parte:
 - ▶ SUGRA IIB, accion, EOMs. Ejemplos: conifold, branas en \mathbb{R}^{10} , branas en $\mathbb{R}^4 \times \text{Conifold}_6$
 - ▶ SUGRA IIA: accion, EOMs . Teoría M.

Preliminares

Introducción

- ▶ Supercuerdas a bajas energías es Supergravedad
- ▶ bajas energías no quiere decir bajas dimensiones.
- ▶ Meta: teorías de supergravedad en diferentes dimensiones.
- ▶ Supersimetrías extendidas ($N > 1$) y con carga central

- ▶ Supergravidades son teorías de campo con supersimetría **local**.
- ▶ Uds han visto SUSY **global o rígida** : el parámetro de transformación es un espinor constante ϵ^α .
- ▶ Local SUSY, “gauging” SUSY : introducir un campo gauge $\psi_\mu^\alpha(x)$.
- ▶ $\delta_Q \psi_\mu^\alpha(x) = \partial_\mu \epsilon^\alpha(x) + \dots$, donde $\epsilon^\alpha(x)$ es una función arbitraria de las coordenadas espacio tiempo x^μ .
- ▶ El campo $\psi_\mu^\alpha(x)$ es un campo de spin $\frac{3}{2}$, Rarita-Schwinger
- ▶ Necesitamos más. Sabemos que:

$$\{Q^\alpha, \bar{Q}_\beta\} = (\gamma^a)^\alpha_\beta P_a.$$

- ▶ Entonces, gauging SUSY lleva a gauging las translaciones.
- ▶ Como una translacion local es una transformacion de coordenadas general, necesitamos que la métrica, $g_{\mu\nu}(x)$ sea tambien un gauge field.
- ▶ En otra palabras SUGRAs son teorías invariantes bajo SUSY local y bajo transformacionde generales de coordenadas.

$\mathcal{N} = 1$ SUGRA en $d=4$

- ▶ Supergravity superfield; vierbein $e_\mu^a(x)$, spin 2 + Majorana spinor $\psi_\mu(x)$, spin 3/2.
- ▶ The Rarita-Schwinger field satisfies the Majorana condition $\psi_\mu^c (\equiv C\bar{\psi}_\mu^T) = \psi_\mu$, where C is the charge conjugation matrix satisfying

$$C^{-1}\gamma^a C = -\gamma^{aT}, \quad C^T = -C.$$

- ▶ $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$, donde $\eta_{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$.
- ▶ Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}e\hat{R} - \frac{1}{2}ie\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\hat{D}_\nu\psi_\rho,$$

- ▶ Este Lagrangiano es invariante bajo 3 tipos de simetrias locales:
 - ▶ general coordinate transformations.
 - ▶ local Lorentz transformations.
 - ▶ local supertransformations.

Super-Poincaré algebra.

- ▶ También se pueden considerar supergravidades extendidas, $\mathcal{N} > 1$.
- ▶ \mathcal{N} parametros de transformación, ϵ^i , $i = 1 \cdots \mathcal{N}$.
- ▶ \mathcal{N} gravitinos $\psi_{\mu}^i(x)$.
- ▶ Para construir supermultipletes con $\mathcal{N} > 1$ tenemos que añadir otros campos además de la métrica y $\psi_{\mu}^i(x)$.

Cuantos ?

Cuales ?

Máximo número de SUSY ?

Respuestas dependen de D.

Primera parte: Espinores y SUGRA en ≥ 4

- ▶ La estructura y propiedades de un campo cuántico están dadas por la representación del grupo homogéneo de Lorentz bajo la cual transforma.
- ▶ “representación del grupo homogéneo de Lorentz”, conjunto de matrices

$$D(\bar{\Lambda})D(\Lambda) = D(\bar{\Lambda}\Lambda)$$

- ▶ estudiar las propiedades de estas matrices considerando el caso infinitesimal:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}$$

con $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$.



$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \mathcal{J}^{\mu\nu}$$

con $\mathcal{J}^{\mu\nu} = \mathcal{J}^{\nu\mu}$ un conjunto de matrices que satisfacen el álgebra de Poincaré.

- ▶ En particular,

$$i[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \mathcal{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \mathcal{J}^{\rho\mu} \quad (1)$$

- ▶ La estrategia para encontrar matrices que satisfagan (??) sera primero construir matrices γ^μ tales que

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (2)$$

- ▶ Un conjunto de matrices que satisfacen (??) definen un álgebra de Clifford.
- ▶ γ : matrices de Dirac .

Definir

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \quad (3)$$

por construcción las $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ satisfacen (??).

Nos interesan las representaciones *irreducibles*.

La representación irreducible mas general del grupo de Lorentz es ya sea un tensor o un espinor o el producto directo de un tensor y un espinor.

Teniendo matrices gamma se puede construir otros tensores totalmente antisimetricos:

$$\mathcal{A}^{\mu\nu\rho} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \quad (4)$$

$$\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \quad (5)$$

$$\mathcal{F}^{\mu\nu\rho\sigma\alpha} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\alpha \quad (6)$$

\vdots

Todo lo dicho hasta ahora es independiente del número de dimensiones. En cuatro dimensiones sucede que no hay tensor totalmente antisimétrico con más de cuatro índices entonces la secuencia $\mathbf{1}, \gamma^\rho, \mathcal{J}^{\rho\sigma}, \mathcal{A}^{\rho\sigma\nu} \dots$ termina en (**??**).

Espinores en $d \geq 4$

Considerar representaciones espinoriales del grupo $SO(t,s)$ con una métrica

$$\eta_{ab} = \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_t, \underbrace{+1, \dots, +1}_s), \quad d = t + s. \quad (7)$$

Minkowski d -dimensional: $t = 1, s = d - 1$

γ^a ($a = 1, 2, \dots, d$) de $SO(1, d - 1)$ satisfacen la relación de conmutación

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}. \quad (8)$$

En dimension d las matrices mas pequeñas que satisfacen esta relacion de conmutación son $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \times 2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$, donde $\lfloor x \rfloor$ quiere decir el entero mas grande no mayor que x .

En $d = 2n$ para un espacio Euclideo, $(0, s)$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \gamma^1 &= \sigma^1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
 \gamma^2 &= \sigma^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
 \gamma^3 &= \sigma^3 \otimes \sigma^1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
 \gamma^4 &= \sigma^3 \otimes \sigma^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
 &\vdots \\
 \gamma^{2k+1} &= \underbrace{\sigma^3 \otimes \cdots \otimes \sigma^3}_k \otimes \sigma^1 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
 \gamma^{2k+2} &= \underbrace{\sigma^3 \otimes \cdots \otimes \sigma^3}_k \otimes \sigma^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}, \\
 &\vdots \\
 \gamma^{2n-1} &= \sigma^3 \otimes \cdots \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^1, \\
 \gamma^{2n} &= \sigma^3 \otimes \cdots \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^2,
 \end{aligned} \tag{9}$$

Para un espacio (t, s) hay que multiplicar las últimas s matrices γ por I . En dimensiones pares siempre se puede definir una matriz

$$\tilde{\gamma} \equiv \gamma_{2n+1} \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(s-t)} i \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_{2n} \quad (10)$$

γ_{2n+1} anticonmuta con todas las otras γ s.

$$\{\gamma_{2n+1}, \gamma_\mu\} = 0 \quad \text{para } \mu = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1. \quad (11)$$

y se cumple que $\tilde{\gamma}^2 = \mathbf{1}$.

Si $d = 2n$, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ de ecuación (??) **NO** proporciona una representación irreducible del álgebra $SO(1, s)$ ya que

$$[\gamma_{2n+1}, \mathcal{J}_{\mu\nu}] = 0. \quad (12)$$

Para obtener una representación irreducible debemos imponer restricciones, proyecciones, que sean compatibles con el álgebra.

En **dimensiones impares**, $d = 2n + 1$, las matrices Gamma se construyen tomando las del caso $d = 2n$ y añadiendo una mas. Esta ultima matriz γ^{2n+1} se puede tomar como

$$\gamma^{2n+1} = (-1)^{\frac{1}{4}(s-t)} i \gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^{2n}. \quad (13)$$

Es facil ver que cuando d es impar no se puede definir el análogo de $\tilde{\gamma}$ ya que si tomamos el producto de las $2n + 1$ matrices de las gamma es trivial,

$$\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_{2n} \gamma_{2n+1} \sim \mathbf{1}. \quad (14)$$

Para obtener representaciones irreducibles hay 2 tipos de proyecciones que podemos imponer.

1) Chiralidad.

$$\tilde{\gamma}\psi = \pm\psi \quad (15)$$

Esto define los espinores de Weyl. Esta proyección depende de haber definido un $\tilde{\gamma}$ que como mencionamos arriba se puede hacer siempre en dimensiones pares pero no en dimensiones impares. Por lo tanto espinores de Weyl existen en todo d par y no existen en d impar.

2) Reality condition. Majorana spinors.

Espinores de $SO(1, d - 1)$ tienen en general, $2^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$ componentes complejas

Espinores generales a los cuales no se ha impuesto ninguna condición son llamados espinores de Dirac.

Espinores de Weyl.

Weyl spinors are those having a definite chirality in even dimensions.

We define the chirality of spinors as an eigenvalue of the matrix

$$\bar{\gamma} = (-1)^{\frac{1}{4}(s-t)} \gamma^1 \gamma^2 \dots \gamma^d \quad (16)$$

satisfying

$$\bar{\gamma}^2 = 1, \quad \{\bar{\gamma}, \gamma^a\} = 0. \quad (17)$$

This matrix $\bar{\gamma}$ is a generalization of γ_5 in four dimensions. Weyl spinors with positive (or negative) chirality are defined by

$$\bar{\gamma}\psi = \psi \quad (\text{or } \bar{\gamma}\psi = -\psi). \quad (18)$$

Es fácil ver que en dimensiones pares siempre podemos definir $\bar{\gamma}$ y por lo tanto **siempre se pueden definir espinores de Weyl en $d = 2n$**

En dimensiones impares $\bar{\gamma}$ es proporcional a la matriz unidad. Por lo tanto **no se pueden definir espinores de Weyl en $d = 2n + 1$.**

Espinores de Majorana

Majorana spinors satisfacen la condici3n de realidad:

$$\psi^c = \psi, \quad (19)$$

1) $d = t + s = \text{par}$ Then, it can be shown that there exist matrices B_+ and B_- , which relate $\pm(\gamma^a)^*$ to γ^a by similarity transformations

$$\begin{aligned} (\gamma^a)^* &= B_+ \gamma^a B_+^{-1}, \\ -(\gamma^a)^* &= B_- \gamma^a B_-^{-1}. \end{aligned} \quad (20)$$

The charge conjugation is defined by using one of these matrices as

$$\psi^c = B_+^{-1} \psi^* \quad \text{or} \quad \psi^c = B_-^{-1} \psi^*. \quad (21)$$

It can be shown that B_{\pm} satisfy

$$B_{\pm}^* B_{\pm} = \epsilon_{\pm}(t, s) \mathbf{1} \quad (22)$$

$s - t$	1	2	3	4	5	6	7	8
ϵ_+	No	-1	-1	-1	No	+1	+1	+1
ϵ_-	+1	+1	No	-1	-1	-1	No	+1

Table : The values of ϵ_{\pm} .

Equivalente a la conjugacion de carga usual. Considerar

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger A, \quad A = \gamma^1 \gamma^2 \cdots \gamma^t. \quad (23)$$

Then, eq. (??) can be rewritten as

$$\psi^c = C_+ \bar{\psi}^T \quad \text{or} \quad \psi^c = C_- \bar{\psi}^T \quad \left(C_\pm = B_\pm^{-1} A^{-1T} \right). \quad (24)$$

The charge conjugation matrices C_\pm satisfy

$$\begin{aligned} \gamma^{aT} &= \pm (-1)^{t+1} C_\pm^{-1} \gamma^a C_\pm, \\ C_\pm^\dagger C_\pm &= \mathbf{1}, \quad C_\pm^T = (\pm 1)^t (-1)^{\frac{1}{2}t(t-1)} \epsilon_\pm C_\pm. \end{aligned} \quad (25)$$

- ▶ Se debe cumplir que $(\psi^c)^c = \psi$, $\rightarrow B_+^* B_+ = 1$ o $B_-^* B_- = 1$.
- ▶ $t + s = \text{par} \rightarrow$ Majorana spinors solo se pueden definir cuando $\epsilon_+(t, s) = 1$ o $\epsilon_-(t, s) = 1$.
- ▶ B_+ : pseudo Majorana spinors
- ▶ B_- : Majorana spinors.

2) $d=t + s$ odd

Similar a γ matrices, usar B_{\pm} para $d - 1$.

$$\gamma^a (a = 1, 2, \dots, d - 1)$$

$$\gamma^d = i\bar{\gamma}$$

Las B_{\pm} satisfacen,

$$B_{\pm} \gamma^a B_{\pm}^{-1} = \pm (\gamma^a)^* \quad (a = 1, \dots, d - 1),$$

$$B_{\pm} \gamma^d B_{\pm}^{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}(s-t+1)} (\gamma^d)^*. \quad (26)$$

Si $(-1)^{\frac{1}{2}(s-t+1)} = 1$ ($(-1)^{\frac{1}{2}(s-t+1)} = -1$), signos OK y podemos usar B_+ (B_-) para definir la conjugacion de carga.

Majorana-Weyl

Se pueden definir (pseudo) Majorana-Weyl spinors: satisfacen la condición (pseudo) Majorana $\psi^c = \psi$ y la condición de Weyl. $\bar{\gamma}\psi = \psi$ (or $\bar{\gamma}\psi = -\psi$).

Consistencia: ψ y ψ^c tienen que tener la misma chiralidad.

Cuando un ψ has a cspinor tiene chiralidad $+$ ($-$), el spinor conjugado de carga ψ^c tiene chiralidad $(-1)^{\frac{1}{2}(s-t)}$ ($-(-1)^{\frac{1}{2}(s-t)}$).

→ (pseudo) Majorana-Weyl spinors solo se pueden definir en $s - t = 0 \pmod{4}$. En particular, en $d = 2 \pmod{4}$ para signatura de Minkowski $t = 1, s = d - 1$.

d	W	M	pM	MW	pMW
2	○	○	○	○	○
3		○			
4	○	○			
5					
6	○				
7					
8	○		○		
9			○		
10	○	○	○	○	○
11		○			

Table : Spinors en d -dimensional Minkowski space-time ($t = 1, s = d - 1$).

SUGRA en diferentes dimensiones

La parte del álgebra de Super Poincare que involucra las cargas de supersimetría es:

$$\{Q_\alpha^i, Q_{\beta j}\} = (\gamma_\mu \dots) P_\mu \delta_j^i \quad (27)$$

$$[M_{\mu\nu}, Q_\alpha^i] = \frac{1}{4} (\gamma_{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta^i. \quad (28)$$

Invariante bajo rotaciones

$$[T^A, Q_\alpha^i] = (U_A)_j^i Q_\alpha^j \quad (29)$$

las matrices U_A forman el grupo de automorfismo K.

$$[T^A, T^B] = f_C^{AB} T^C \quad (30)$$

El grupo K y la forma exacta de $\{Q, Q\}$ dependen de que tipo de espinor es Q.

El grupo de autmorfismo depende de que tipo de espinor es Q^i .

Por ejemplo, para $d = 4, 8$ - espinores Weyl y Majorana - se puede mostrar (Jacobi identity) que

$$(U_A)_i^j = -(U_A)_i^j \equiv ((U_A)_i^j)^* \quad (31)$$

Las matrices U son unitarias y $K = U(N)$.

$$\begin{aligned}
 M \text{ and } d \text{ odd} & : SO(N) \\
 M \text{ and } d \text{ even} & : U(N) \\
 MW & : SO(N_L) \times SO(N_R) \\
 SMW & : USp(N_L) \times USp(N_R) .
 \end{aligned} \quad (32)$$

D	Q_{irr}	H_{R}	type
1, 3, 9, 11	$2^{(D-1)/2}$	$\text{SO}(N)$	M
5, 7	$2^{(D+1)/2}$	$\text{USp}(N)$	D
4, 8	$2^{D/2}$	$\text{U}(N)$	M
6	$2^{D/2}$	$\text{USp}(N_+) \times \text{USp}(N_-)$	W
2, 10, mod 8	$2^{D/2-1}$	$\text{SO}(N_+) \times \text{SO}(N_-)$	MW

Table : The supercharges in various spacetime dimensions D . Q_{irr} specifies the real dimension of an irreducible spinor in a D -dimensional Minkowski spacetime. .

Table ??,

$d \setminus Q$	32	16	8	4
11	✓			
10	<i>IIB</i> (2, 0)	<i>IIA</i> (1, 1)	<i>I</i> (1, 0)	
9	✓	✓		
8	✓	✓		
7	✓	✓		
6	(2, 2)	(2, 0) (1, 1)	(1, 0)	
5	✓	✓	✓	
4	$N = 8$	$N = 4$	$N = 2$	$N = 1$

Table : *Pure supergravity theories in Minkowski space of dimensions $4 \leq d \leq 11$ with the number of independent supercharges equal to $Q = 32, 16, 8$ and 4*

$d = 4, 8 \pmod 8$ $K = U(N)$.

$$\{Q_+^i, Q_{-j}^T\} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\gamma})\gamma^a C P_a \delta_j^i,$$

$$\{Q_+^i, Q_+^{jT}\} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\gamma})CZ^{ij},$$

Ejemplos de álgebras:

$d = 10 \pmod 8$ $K = SO(N_+) \times SO(N_-)$.

$$\{Q_+^i, Q_+^{jT}\} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\gamma})\gamma^a C_- P_a \delta^{ij},$$

$$\{Q_-^i, Q_-^{jT}\} = \frac{1}{2}(1 - \bar{\gamma})\gamma^a C_- P_a \delta^{ij},$$

$$\{Q_+^i, Q_-^{jT}\} = \frac{1}{2}(1 + \bar{\gamma})C_- Z^{ij}.$$

supermultipletes : se obtienen estudiando las representaciones sin masa, $P_\mu P^\mu = 0$, del álgebra.

d	N	type	fields	n
11	1	M	$e_{\mu}^a, \psi_{\mu}, B_{\mu\nu\rho}$	128
10	(1,1)	MW	$e_{\mu}^a, \psi_{+\mu}, \psi_{-\mu}, B_{\mu\nu\rho}, B_{\mu\nu}, B_{\mu}, \lambda_{+}, \lambda_{-}, \phi$	128
	(2,0)	MW	$e_{\mu}^a, 2\psi_{+\mu}, B_{\mu\nu\rho\sigma}^{(+)}, 2B_{\mu\nu}, 2\lambda_{-}, 2\phi$	128
	(1,0)	MW	$e_{\mu}^a, \psi_{+\mu}, B_{\mu\nu}, \lambda_{-}, \phi$	64
9	2	pM	$e_{\mu}^a, 2\psi_{\mu}, B_{\mu\nu\rho}, 2B_{\mu\nu}, 3B_{\mu}, 4\lambda, 3\phi$	128
	1	pM	$e_{\mu}^a, \psi_{\mu}, B_{\mu\nu}, B_{\mu}, \lambda, \phi$	56
8	2	pM	$e_{\mu}^a, 2\psi_{\mu}, B_{\mu\nu\rho}, 3B_{\mu\nu}, 6B_{\mu}, 6\lambda, 7\phi$	128
	1	pM	$e_{\mu}^a, \psi_{\mu}, B_{\mu\nu}, 2B_{\mu}, \lambda, \phi$	48
7	2	sM	$e_{\mu}^a, 4\psi_{\mu}, 5B_{\mu\nu}, 10B_{\mu}, 16\lambda, 14\phi$	128
	1	sM	$e_{\mu}^a, 2\psi_{\mu}, B_{\mu\nu}, 3B_{\mu}, 2\lambda, \phi$	40
6	(2,2)	sMW	$e_{\mu}^a, 4\psi_{+\mu}, 4\psi_{-\mu}, 5B_{\mu\nu}, 16B_{\mu}, 20\lambda_{+}, 20\lambda_{-}, 25\phi$	128
	(2,1)	sMW	$e_{\mu}^a, 4\psi_{+\mu}, 2\psi_{-\mu}, 5B_{\mu\nu}^{(+)}, B_{\mu\nu}^{(-)}, 8B_{\mu}, 10\lambda_{+}, 4\lambda_{-}, 5\phi$	64
	(1,1)	sMW	$e_{\mu}^a, 2\psi_{+\mu}, 2\psi_{-\mu}, B_{\mu\nu}, 4B_{\mu}, 2\lambda_{+}, 2\lambda_{-}, \phi$	32
	(2,0)	sMW	$e_{\mu}^a, 4\psi_{+\mu}, 5B_{\mu\nu}^{(+)}$	24
	(1,0)	sMW	$e_{\mu}^a, 2\psi_{+\mu}, B_{\mu\nu}^{(+)}$	12
5	4	spM	$e_{\mu}^a, 8\psi_{\mu}, 27B_{\mu}, 48\lambda, 42\phi$	128
	3	spM	$e_{\mu}^a, 6\psi_{\mu}, 15B_{\mu}, 20\lambda, 14\phi$	64
	2	spM	$e_{\mu}^a, 4\psi_{\mu}, 6B_{\mu}, 4\lambda, \phi$	24
	1	spM	$e_{\mu}^a, 2\psi_{\mu}, B_{\mu}$	8
4	8	M	$e_{\mu}^a, 8\psi_{\mu}, 28B_{\mu}, 56\lambda, 70\phi$	128
	6	M	$e_{\mu}^a, 6\psi_{\mu}, 16B_{\mu}, 26\lambda, 30\phi$	64
	5	M	$e_{\mu}^a, 5\psi_{\mu}, 10B_{\mu}, 11\lambda, 10\phi$	32
	4	M	$e_{\mu}^a, 4\psi_{\mu}, 6B_{\mu}, 4\lambda, 2\phi$	16
	3	M	$e_{\mu}^a, 3\psi_{\mu}, 3B_{\mu}, \lambda$	8
	2	M	$e_{\mu}^a, 2\psi_{\mu}, B_{\mu}$	4
	1	M	e_{μ}^a, ψ_{μ}	2

Segunda parte: Soluciones de SUGRA

Supergravedad tipo IIB

Parte bosónica de la acción -en Einstein frame,

$$\frac{1}{2\kappa^2} \int d^{10}x (-G)^{1/2} R - \frac{1}{4\kappa^2} \int \left(d\Phi \wedge *d\Phi + e^{2\Phi} dC \wedge *dC + g_s e^{-\Phi} H_3 \wedge *H_3 + g_s e^{\Phi} \tilde{F}_3 \wedge *\tilde{F}_3 + \frac{g_s^2}{2} \tilde{F}_5 \wedge *\tilde{F}_5 + g_s^2 C_4 \wedge H_3 \wedge F_3 \right) \quad (33)$$

Además se debe cumplir la self duality condition.

$$*\tilde{F}_5 = \tilde{F}_5 . \quad (34)$$

donde,

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3 &= F_3 - CH_3 , & F_3 &= dC_2 , \\ \tilde{F}_5 &= F_5 - C_2 \wedge H_3 , & F_5 &= dC_4 . \end{aligned} \quad (35)$$

Las ecuaciones de movimiento son,

$$\begin{aligned}
 d*d\Phi &= e^{2\Phi}dC \wedge *dC - \frac{g_s e^{-\Phi}}{2}H_3 \wedge *H_3 + \frac{g_s e^{\Phi}}{2}\tilde{F}_3 \wedge *\tilde{F}_3, \\
 d(e^{2\Phi}*dC) &= -g_s e^{\Phi}H_3 \wedge *\tilde{F}_3, \\
 d*(e^{\Phi}\tilde{F}_3) &= g_s F_5 \wedge H_3, \\
 d*(e^{-\Phi}H_3 - Ce^{\Phi}\tilde{F}_3) &= -g_s F_5 \wedge F_3, \\
 d*\tilde{F}_5 &= -F_3 \wedge H_3, \\
 R_{MN} &= \frac{1}{2}\partial_M\Phi\partial_N\Phi + \frac{e^{2\Phi}}{2}\partial_M C\partial_N C + \frac{g_s^2}{96}\tilde{F}_{MPQRS}\tilde{F}_N{}^{PQRS} \\
 &\quad + \frac{g_s}{4}(e^{-\Phi}H_{MPQ}H_N{}^{PQ} + e^{\Phi}\tilde{F}_{MPQ}\tilde{F}_N{}^{PQ}) \\
 &\quad - \frac{g_s}{48}G_{MN}(e^{-\Phi}H_{PQR}H^{PQR} + e^{\Phi}\tilde{F}_{PQR}\tilde{F}^{PQR}). \quad (36)
 \end{aligned}$$

Las Bianchi identities,

$$\begin{aligned}
 d\tilde{F}_3 &= -dC \wedge H_3 \\
 d\tilde{F}_5 &= -F_3 \wedge H_3. \quad (37)
 \end{aligned}$$

y la condición de autodualidad

$$F_5 = *F_5$$

.

Nota: Algunos paquetes de Mathematica populares para resolver las EOM's son EDCRGTCode.m, RGTC.nb y diffgeo.m

Soluciones de vacío (no branas = no flujos)

ejemplo: $Minkowski_4 \times CY_6$. Calabi-Yau: complex manifolds que son Kähler y Ricci flat. Compactificaciones en CY_6 garantizan que SUSY no este del todo rota en la teoria de bajas dimensiones.



ejemplo de CY: conifold, resolved conifold, deformed conifold.

- ▶ compactification de $10 \rightarrow 4$ en CY preservan $1/4$ SUSY
 - ▶ Ejemplo : compactificacion (a 4d) de IIB en CY $32/4 = 8 \rightarrow N = 2$ en 4d.
 - ▶ Ejemplo: compactification (a 4d) de Heterotica en CY $16/4 = 4 \rightarrow N = 1$ en 4d. Ver curso de Saul.
- ▶ Gauge/Gravity duality, no compactification. Objetos interesantes D3 branas, IIB. Ver cursos de Hugo y Alberto.

1. conifold

$$ds_6^2 = dr^2 + r^2 ds_5^2$$

$$\text{donde } ds_5^2 = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^2 (d\psi + \sum_{i=1}^2 \cos \theta_i d\phi_i)^2 + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^2 (d\theta_i^2 + \sin^2 \theta_i d\phi_i^2)$$

Esta metrica 5 dimensional se llama $T_{1,1}$.

- ▶ la metrica 6 idimensional es un cono sobre $T_{1,1}$
- ▶ topologia $S^2 \times S^3$
- ▶ singularidad $r \rightarrow 0$

Define:

$$e_1 = \sin \theta_1 d\phi_1$$

$$e_2 = d\theta_1$$

$$e_3 = d\psi + \cos \theta_1 d\phi_1 + \cos \theta_2 d\phi_2$$

$$e_4 = \cos \psi \sin \theta_2 d\phi_2 - \sin \psi d\theta_2$$

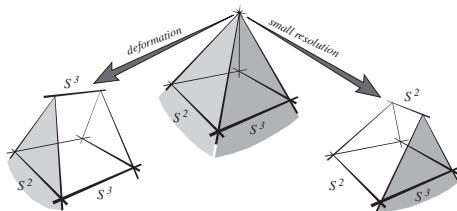
$$e_5 = \sin \psi \sin \theta_2 d\phi_2 + \cos \psi d\theta_2$$

y por lo tanto

$$ds_6^2 = dr^2 + r^2 ds_5^2$$

$$ds_5^2 = \frac{1}{9}e_3^2 + \frac{1}{6}(e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 + e_5^2)$$

donde ds_5^2 es la métrica del T_{11} .



2. resolved conifold

$$ds_6^2 = \frac{1}{K(\rho)} d\rho^2 + \frac{K(\rho)}{9} \rho^2 e_3^2 + \frac{\rho^2}{6} (e_1^2 + e_2^2) + \frac{\rho^2 + 6a^2}{6} (e_4^2 + e_5^2)$$

$$\text{donde } K(\rho) \equiv \frac{\rho^2 + 9a^2}{\rho^2 + 6a^2}$$

S^2 remains finite as $\rho \rightarrow 0$

3. deformed conifold

$$ds_6^2 = \epsilon^{2/3} K(\tau) \left[\frac{1}{3K^3(\tau)} (d\tau^2 + e_3^2) + \cosh^2 \frac{\tau}{2} (e_4^2 + e_5^2) + \sinh^2 \frac{\tau}{2} (e_1^2 + e_2^2) \right]$$

$$K(\tau) = \frac{(\sinh 2\tau - 2\tau)^{2/3}}{2^{1/3} \sinh \tau}$$

τ es una coordenada radial.

► $\tau \rightarrow \infty, r^3 \sim \epsilon^2 e^\tau \mathbf{y}$

$$ds_6^2 \rightarrow dr^2 + r^2 d_{T11}^2$$

► $\tau \rightarrow 0,$

$$ds_6^2 \rightarrow \epsilon^{4/3} [(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) + \tau^2 (e_4^2 + e_5^2)]$$

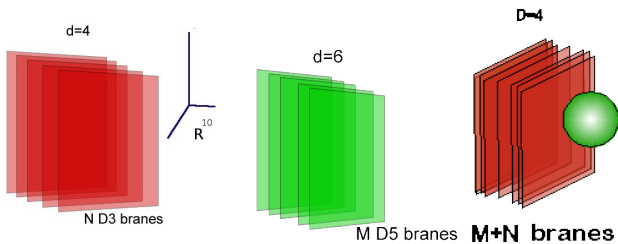
ahora el S^3 remains finite as $\rho \rightarrow 0$

- ▶ La motivación para estudiar fondos IIB con branas es que cada uno de estos fondos es dual a diferentes teorías de campo. Ver curso de Alberto.
- ▶ Tratamos de construir/encontrar fondos gravitacionales cuyos duales sean parecidos a QCD.

Soluciones con flujos

Dos comentarios sobre branas

1. En este curso nos enfocamos a soluciones de supergravedad. Cuando hablamos de "branas" o "D branas" en realidad nos estamos refiriendo a "la geometria" de las D-branas ("p branas negras"). Las D-branas son objetos en teoria de cuerdas y no son lo mismo que "p branas negras" (soluciones de supergravedad) . Ver cursos de Hugo y Alberto.)
2. Las D-branas estan cargadas bajo campos gauge generalizados (flujos Ramond Ramond) por lo tanto la preseencia de branas implica que hay flujos Ramond-Ramond (denotados aca por F 's) no triviales. El H_3 no es Ramond-Ramond, es NS-NS y puede existir en soluciones de vacio pero con torsion.



Tambien podemos tener branas enrolladas

D branas planas en \mathbb{R}^{10}

la backreaction deforma la geometria. Para encontrar una solución necesitamos un **ansatz consistente con simetrías**

$$ds_{10}^2 = h(r)^{-1/2}(dx_i dx^i) + h(r)^{1/2} ds_6^2$$

Ejemplo:

ansatz: tomar Φ constante, $C = 0$ y $F_3 = H_3 = 0$. Las ecuaciones se reducen a

$$R_{MN} = \frac{g_s^2}{96} F_{MPQRS} F_N{}^{PQRS}$$

y

$$F_5 = *F_5$$

- Una solución: **D3 branas negras extremales**

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_5^2)$$

$$* \tilde{F}_5 = N \text{Vol}(S_5) \quad \Phi_5 = \tilde{F}_5 + * \tilde{F}_5$$

Φ constante

- **Dp branas**

$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^{7-p}}{r^{7-p}}\right)^{-1/2} \left(\sum_{i=1}^{i=p+1} x_i^2\right) + \left(1 + \frac{L^{7-p}}{r^{7-p}}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2)$$

$$e^{2\Phi} = e^{2\Phi_\infty} \left(1 + \frac{L^{7-p}}{r^{7-p}}\right)^{\frac{3-p}{2}}$$

$$* \tilde{F}_{p+2} = Q \text{Vol}_{S_{8-p}} \quad F_{p+2} = * \tilde{F}_{p+2} + \tilde{F}_{p+2}$$

- ▶ Otra solución es

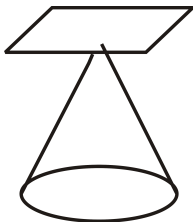
$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2}(-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + L^2\left(\frac{dr^2}{r^2} + d\Omega_5^2\right)$$

$$F_5 = N \text{Vol}(S_5)$$

Φ constante

Esta métrica es $AdS_5 \times S_5$. Notar 1) que la S_5 es la variedad maximamente simétrica, su grupo de isometría es $SO(6)$ 2) $AdS_5 \times S_5$ también aparece como el límite de una solución de D3 branas (Ver curso de Alberto).

En lugar de tener branas en \mathbb{R}^{10} podemos tener branas en $\mathbb{R}^4 \times CY_6$
D3 branas en tip of the conifold (Klebanov-Witten)



$$ds^2 = \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{-1/2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(1 + \frac{L^4}{r^4}\right)^{1/2} (dr^2 + r^2 dT_{11}^2)$$

$$*F_5 = N \text{Vol}(T_{11})$$

Φ constante

Tmabien,

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + L^2 \left(\frac{dr^2}{r^2} + dT_{11}^2 \right)$$

$$F_5 = N \text{Vol}(T_{11})$$

Ya vimos la métrica del T_{11} ,

$$ds_5^2 = \frac{1}{9}e_3^2 + \frac{1}{6}(e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 + e_5^2)$$

Las isometrías del T_{11} son $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$

Branas enrolladas

- ▶ D5 branas enrolladas en S^2 + D3 banas planas: Klebanov-Tseytlin, Klebanov-Strassler
- ▶ D5 branas enrolladas en S^2 : Maldacena-Nuñez

$$ds_{10}^2 = A^2(\tau)dx_id x^i + B^2(\tau)d^2\tau + C^2(\tau)e_3^2 + D^2(\tau)(e_1^2 + e_2^2) + E^2(\tau)(e_4^2 + e_5^2)$$

More general conifold-type backgrounds

- ▶ Y_{pq} : elementos de la metrica dependen en r y θ
- ▶ resolved Y_{pq}
- ▶ branas on Y_{pq}

Aun mas general:

- ▶ Non- Kähler backgrounds, $a(r)$
- ▶ Backreaction of flavor

Warped, deformed conifold (Klebanov- Strassler)

- ▶ N D3 + M D5 branas en la deformed conifold. Las D5 estan enrolladas en el S^2 de la base de la deformed conifold.

$$ds_{10}^2 = h(\tau)^{-1/2} dx_i dx^i + h(\tau)^{1/2} ds_6^2$$

donde

$$h(\tau) \equiv \int_{\tau}^{\infty} \frac{x \coth x - 1}{\sinh^2 x} (\sinh 2x - 2x)^{1/3}$$

$$F_3 = M [e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 + d[F(\tau)(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_5)]]$$

$$H_3 = g_s M \left[d\tau \wedge (f' e_1 \wedge e_2 + k' e_4 \wedge e_5) + \frac{1}{2} (k - f) e_3 \wedge (e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_5) \right]$$

$$F_5 = g_s M^2 l(\tau) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$$

Φ constante

donde

$$f(\tau) = \frac{\tau \coth \tau - 1}{2 \sinh \tau} (\cosh \tau - 1)$$

$$k(\tau) = \frac{\tau \coth \tau - 1}{2 \sinh \tau} (\cosh \tau + 1)$$

$$l(\tau) = \frac{\tau \coth \tau - 1}{4 \sinh^2 \tau} (\sinh 2\tau - 2\tau)$$

$$F(\tau) = \frac{\sinh \tau - \tau}{2 \sinh \tau}$$

Notar que cuando $\tau \rightarrow 0$,

$$f(\tau) \rightarrow \tau^3, \quad k(\tau) \rightarrow \tau, \quad l(\tau) \rightarrow \tau^3, \quad F(\tau) \rightarrow \tau^2$$

$$h(\tau) \rightarrow a_0(\text{constante})$$

por lo tanto cerca de $\tau \rightarrow 0$ la solución es,

$$ds_{10}^2 \rightarrow a_0^{-1/2} dx_i dx^i + a_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} d^2 \tau + d\Omega_3^2 + \frac{1}{4} \tau^2 (e_1^2 + e_2^2) \right)$$

Wrapped 5 branes Fondos que no Khähler pero que preservan $N = 1$ SUSY

$$ds_{10}^2 = e^{\phi(r)}(dx_i dx^i + e^{2h(r)}(e_1^2 + e_2^2) + \frac{e^{2g(r)}}{4}((e_4^2 + a(r)e_1^2) + (e_5^2 + a(r)e_2^2)) + \frac{e^{2k(r)}}{4}e_3^2)$$

$$F_3 = N \left[-(e_4 + b(r)e_1) \wedge (e_5 - b(r)e_2) \wedge e_3 + b'(r)dr \wedge (-e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_5) \right]$$

este ansatz es muy general para geometrias de D5 enrolladas y acomoda tambien fondos de branas de sabor y su backreaction.

Una solución es el fondo original de
Chamseddine-Volkov-Maldacena-Nuñez

$$b(r) = 0 \rightarrow F_3 \equiv e_4 \wedge e_5 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

$$k(r) = 0 \quad g(r) = 0$$

$$e^{2h(r)} = r \coth 2r - \frac{r^2}{\sinh^2 2r} - \frac{1}{4}$$

$$e^{-2\Phi(r)} \equiv \frac{e^{h(r)}}{\sinh 2r} \quad a(r) = \frac{2r}{\sinh 2r}$$

Teoría M

Acción SUGRA en 11 dimensiones,

$$\frac{1}{2\kappa_{11}^2} \int d^{11}x (-G)^{1/2} R - \frac{1}{4\kappa_{11}^2} \int \left(F_4 \wedge *F_4 + \frac{1}{3} A_3 \wedge F_4 \wedge F_4 \right). \quad (38)$$

Ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} d*F_4 &= \frac{1}{2} F_4 \wedge F_4, \\ R_{MN} &= \frac{1}{12} \left(F_M^{PQR} F_{NPQR} - \frac{1}{12} G_{MN} F^{PQRS} F_{PQRS} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Bianchi identity,

$$dF_4 = 0$$

SUGRA tipo II A

A diferencia de la IIB, la teoría SUGRA IIA puede obtenerse como reducción dimensional de teoría M. Ver acción y ecuaciones en el apéndice hep-th/0101020.

Bibliografía

1. Espinores

- ▶ "Introduction to Supergravities in Diverse Dimensions", Yoshiaki Tani, hep-th/9802138
- ▶ "Tools for supersymmetry" A. van Proeyen, hep-th/9910030

2. Branes on conifold and deformed conifold

- ▶ Klebanov, Witten, hep-th/9807080
- ▶ Klebanov, Strassler, hep-th/0007191

3. Simple Non- Kähler geometries

- ▶ Maldacena-Nuñez, "Towards the large N limit of pure N=1 superYang-Mills," hep-th/0008001
- ▶ Ansatz mas general, seccion 4.1 de "Towards the string dual of N=1 SQCD-like theories" hep-th/0602027

4. IIB, IIA Suga equations of motion

- ▶ appendix of hep-th/0101020